Δεύτερο τεστ Απειροστικός Λογισμός 2

Διάρκεια 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1

Να εξετάσετε με τον ορισμό αν οι συναρτήσεις:

(i) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$

(ii) $g(x) = \ln x,\ x > 0$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

Θέμα 2

Δίνεται συνάρτηση $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι ομοιόμορφα συνεχής στα διαστήματα $(0,1)$ και $[1,+\infty)$. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Αληθείς ή Ψευδείς (με πλήρη αιτιολόγηση).

(i) Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$.

(ii) Το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.

(iii) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι δύο ακολουθίες θετικών πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε $x_n, y_n \to +\infty$ και $x_n - y_n \to 0$, τότε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

(iv) Αν $x_n = 1 - \frac{1}{n},\ n \geq 2$ τότε η ακολουθία $((f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ έχει όριο πραγματικό αριθμό.

Θέμα 3

Εξετάστε αν οι συναρτήσεις:

(i) $f(x) = \dfrac{x}{\tan(5x)},\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{5}\right)$

(ii) $g(x) = x^{3/4},\ x \geq 0$

(iii) $h(x) = \cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{x-1}}\right),\ x > 1$

(iv) $\phi(x) = \cos^2(\sqrt{x}),\ x \geq 0$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

Θέμα 4

Έστω μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση $f\colon \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάποια σταθερά $c > 0$ να ισχύει

$$f(x) \geq c, \quad \text{για κάθε } x \in A \quad (\star)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Η υπόθεση $(\star)$ γενικά μπορεί να παραληφθεί; Υπό την υπόθεση $(\star)$, αν τώρα η συνάρτηση f είναι Lipschitz, η συνάρτηση $\dfrac{1}{f}$ είναι Lipschitz;

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!